MAOAM

CAS-gestützte Lehre in großen Studiengängen

Hendrikje Schmidtpott-Schulz, Prof. Dr. Andreas Bley,
Dr. Sebastian Petersen, Prof. Dr. Wolfram Koepf,
Dr. Anen Lakhal

Universität Kassel, Institut für Mathematik

15.03.2018

Inhalt

Was ist MAOAM?

Im Projekt MAOAM erstellen wir randomisierte Übungsaufgaben für Studenten der Ingenieurwissenschaften. Die Aufgaben werden auf der Onlineplattform moodle bereitgestellt und automatisch mit Feedback ausgewertet.

MAOAM ist ein Projekt der Universität Kassel in der Programmlinie „Förderung guter Lehre in großen Studiengängen“.

Die Herausforderung

Wir betreiben Lehrexport für etwa 400 Elektrotechnik- und Informatikstudierende, Themen: Lineare Algebra, Analysis und Diskrete Strukturen.

Lehrangebot: Vorlesung, kleine Übungsgruppen, Lernzentren, Hausaufgaben
Aber...

- Mathematik ist nur "notwendiges Übel"
- Hausaufgaben werden abgeschrieben
- rechnerische Fähigkeiten fehlen
- immenser Aufwand bei der Korrektur der Hausaufgaben

Lösungsansatz und Rahmenbedingungen

- elektronische Aufgaben
- CAS-Auswertung
- Randomisierung

Zunächst als zusätzliches Übungsangebot gedacht, später auch teilweise als Ersatz für die wöchentlichen Hausaufgaben.

- moodle als Lernplattform etabliert
- Testumgebung vorhanden
- STACK-Plugin für CAS-Aufgaben

Inhalt

Was ist STACK?

- kurz für System for Teaching and Assesment using a Computer Algebra Kernel
- Frage-Plugin für Moodle
- OpenSource, entwickelt an der Universität Birmingham
- basiert auf Maxima

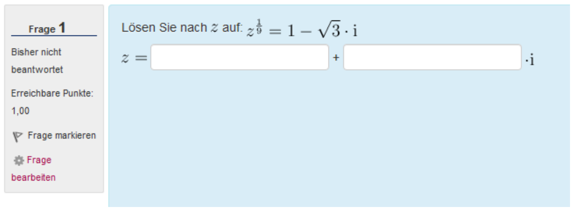


Abbildung: Studentenansicht einer Testfrage

Was kann STACK?

... alles, was man von einer moodle-Frage erwartet.
... eigentlich alle Rechnungen durchführen, die Maxima kann.
Außerdem:

- akzeptiert numerische Antworten, Matrizen, Terme, Dropdown- oder Bulletlisten
- kann randomisierte Aufgaben stellen
- kann mit den Antworten der Studenten weiterarbeiten
- gibt differenziertes Feedback
- Ausdrücke wie int, diff etc. können natürlich auch in den Antworten ausgeschlossen werden
- testet Ausdrücke auf bestimmte Eigenschaften

Was kann Stack?

Stack bietet einige Befehle zum Randomisieren, die nicht in Maxima enthalten sind.

```
rand(n)                       /* der random-Befehl von Maxima*/
rand([x1,x2,x3,...])          /* ein Element der Liste */
                              /* darf auch eine Liste sein.*/
rand_with_step(a,b,t)
                              /* liefert ein Element zwischen a
                                 und b mit Schrittweite t */
rand_with_prohib(a,b,[x1,..])
                              /* ein Element zwischen a und b aber
                                  keins aus der Liste */
```

Beispiel

```
rand([[%pi/3,[1,2,4]],[%pi/2,[1,2,3]])
```

liefert eine der beiden Listen als Ausgabe.

frontend

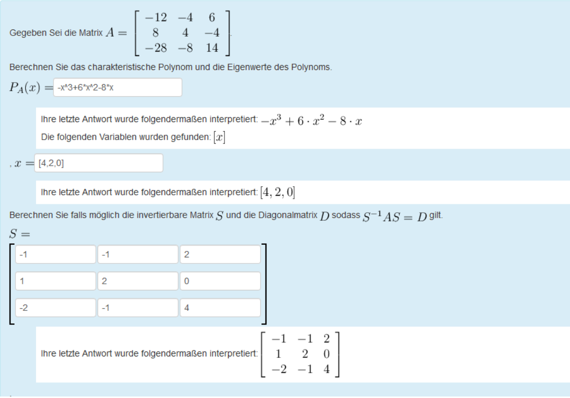


Abbildung: Eingaben werden sofort auf Ihre Gültigkeit überprüft

backend

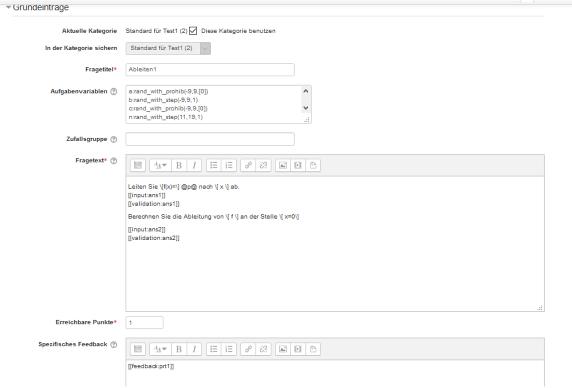


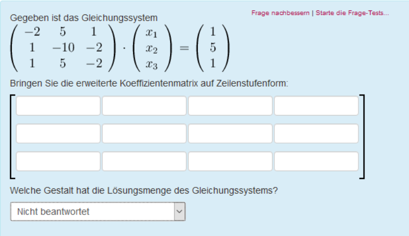
Abbildung: Variablen und Funktionendeklaration, Aufgabenstellung

Feedback

Stack wertet die Antworten der Studenten anhand von Feedbackbäumen aus:

- beliebig viele Feedbackbäume pro Aufgabe möglich.
- ein Feedbackbaum wird durchlaufen, wenn ALLE darin auftretenden Antworten einen Wert besitzen
- an jedem Knoten wird entschieden ob eine *Studentenantwort* mit einer Lehrerantwort übereinstimmt
- Studentenantwort muss nicht die tatsächliche Antwort des Studenten sein
- verschiedene Tests möglich: AlgEquiv, SubstEquiv, Diff, Expanded, ...
- Optionen, z.B. Genauigkeit bei nummerischen Antworten möglich

Beispiel Feedback



Zufallsvariablen: Matrix, Vektor

Feedback:
Stimmen die Row-reduced-echolon-Form der Antworten überein?
Anzahl der Nicht-Null-Zeilen = Rang?
Unterhalb der Diagonalen nur Nulleinträge?
Passt die Matrix zur Antwort bzgl. Lösbarkeit?

Backend Feedbackbaum

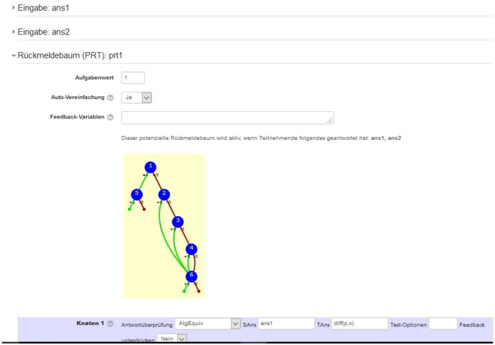


Abbildung: Antworspezifikation und Feedbackbaum

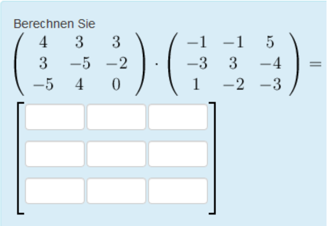
Frage 1: Geben Sie die Ableitung von p(x) an, Frage 2: Werten Sie diese an Stelle $x_0 = 0$ aus.

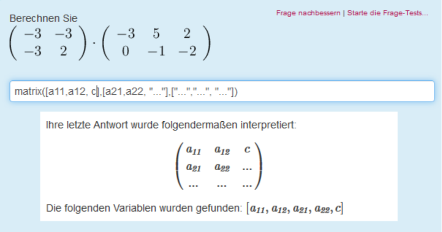
Grenzen von STACK

Aufgabenstellungen an die Antworten der Studenten anpassen:

Problem

Die Lösung wird zu stark vorgegeben oder die Eingabe ist zu kompliziert.





Schöner wäre: Abfrage der Dimension $\rightarrow$ Bereitstellen der Eingabematrix

Grenzen von STACK

Umgang mit leeren Eingabefeldern.

Problem

Feedbackbäume werden nur ausgewertet wenn alle dazugehörenden Antwortfelder ausgefüllt sind.

Es sei

Frage nachbessern | Starte die Frage-Tests...

$$U = lin\left(\left[\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}\right]\right).$$

Es gilt $dim(U) =$ [ ]

Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von U zu an:

$b^{(1)} =$ matrix([x1],[x2],[x3],[x4])

,

$b^{(2)} =$ "existiert nicht"

,

$b^{(3)} =$ "existiert nicht"

,

$b^{(4)} =$ "existiert nicht"

,

$b^{(5)} =$ "existiert nicht"

Geben Sie die Basisvektoren als **matrix([x1],[x2],[x3],[x4])** ein. Überzählige Vektoren müssen mit **"existiert nicht"** gekennzeichnet werden.

Inhalt

Elementare Vektorrechnung

- Vektoren addieren, Länge angeben, Skalarprodukt, Winkel bestimmen etc.
- Geometrie: Geraden-Ebenengleichung, Abstände Punkt/ Gerade /Ebene

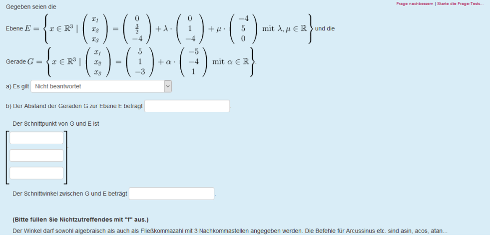
Beispiele:

Berechnen Sie $10 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

Zufallsvariablen: Alle Komponenten zwischen -10 und 10

Elementare Vektorrechnung



- Setze Zufallsvariable:
  - $a, b, c, d \in [-5, 5]$ mit z.B. $b \neq 0$ für $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
  - sämtliche Komponenten des Richtungsvektors v und Aufpunkts A (z.B. $v_1 \neq 0$)
- Berechne Darstellung für E in Parameterform
- Ermittle Rang von der Matrix aus Richtungsvektoren
- Berechne mit HNF und Gerade den Winkel/Abstand

Komplexe Zahlen

- Definition und Anschauung
- Polarkoordinaten und komplexe Exponentialfunktion
- algebraische Gleichungen

$z^n = \square$

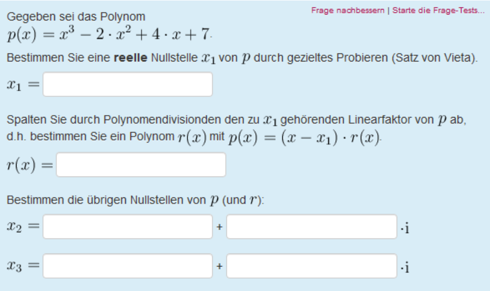
Berechnen Sie

$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3 \cdot i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \square \cdot e^{\square \cdot i}$

Zufallszahlen: n, $z = re^{arg\,\imath}$ in Polarkoordinaten, mit $r \in [1, 3]$ und $arg \in \{\pi/6, \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6\}$

Feedback: Betrag/Argument richtig, Argument im gewünschten Bereich

Komplexe Polynome



Frage nachbessern | Starte die Frage-Tests...

Gegeben sei das Polynom
$p(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 7$.

Bestimmen Sie eine **reelle** Nullstelle x_1 von p durch gezieltes Probieren (Satz von Vieta).

$x_1 =$

Spalten Sie durch Polynomendivisionden den zu x_1 gehörenden Linearfaktor von p ab, d.h. bestimmen Sie ein Polynom $r(x)$ mit $p(x) = (x - x_1) \cdot r(x)$.

$r(x) =$

Bestimmen die übrigen Nullstellen von p (und r):

$x_2 =$ + $\cdot \mathrm{i}$

$x_3 =$ + $\cdot \mathrm{i}$

Zufallsvariablen:
reelle Nullstelle x_1,
Koeffizienten p, q einer quadratischen Funktion mit komplexen Nullstellen

Feedback: Ein Baum für Raten und Polynomendivision, ein Baum für die komplexen Nullstellen des angegebenen Restpolynoms.

Inhalt

Matrizen

Die einfachste Zufallsmatrix lässt sich erstellen mit:

```
a[i,j]:rand_with_step(-max,max,1);
A:genmatrix(a,n,n)
```

Muss diese Matrix regulär sein, reicht es die Diagonalelemente von Null verschieden zu wählen und einen einzigen Wert auszuschließen. Wir ergänzen:

```
a[1,1]:rand_with_prohib(-max,max,[0]);
a[2,2]:rand_with_prohib(-max,max,[0,
    (a[1,2]*a[2,1])/(a[1,1])]);
...
```

wobei der ausgeschlossene Wert sich aus dem Gauß-Algorithmus ergibt.

Matrizen

Wissen wir, dass eine Matrix vom Rang n regulär ist, so können wir einfach eine Matrix mit gewünschtem Rang $r \leq n$ erstellen.

Beispiel

Sei $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir mit $A \cdot B$ eine Matrix vom Rang 2, die (normalerweise) nicht direkt als singulär erkannt wird.

Matrizen

Problem

Die Wahrscheinlichkeit eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit zufällig gewählten Koeffizienten zwischen t und $-t$ zu erhalten, hängt von Dimension n und t ab.

Lösung

Besser kontrollieren lässt sich dies durch:

```
M:rand([A, A.B, A.C, ...])
```

wobei $A, B, C, \ldots$ wie oben konstruiert werden.

invertierbare Matrizen

Satz

- *A ist invertierbar* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- *Es gilt:* $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$

Durch eine linke untere und rechte obere Dreiecksmatrix mit vollbesetzten Hauptdiagonalen lässt sich eine reguläre Matrix erstellen.

```
make_regn_n(n,max):=block([L,R,i,j],
  L[i,j]:=0,
  R[i,j]:=0,
  for i:1 thru n do block(
     L[i,i]:rand_with_prohib(-max,max,[0]),
     R[i,i]:rand_with_prohib(-max,max,[0])),
  for i:1 thru n do
    for j:1 thru i do block(
      R[i+1,j]:rand_with_step(-max,max,1),
      L[n-i,n+1-j]:rand_with_step(-max,max,1)),
  L:genmatrix(L,n,n), R:genmatrix(R,n,n), L.R);
```

invertierbare Matrizen

Aus der Cramerschen Regel folgt:

Satz

Für die Inverse A^{-1} einer Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n,n}$ mit $det(A) = \pm 1$ gilt: $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n,n}$

Erlauben wir für unsere Dreiecksmatrizen L und R nur 1 und -1 auf der Hauptdiagonalen, erhalten wir mit $A = L \cdot R$ eine ganzzahlig invertierbare Matrix.

Inhalt

Analysis

Zum nächsten Semester ist der Einsatz in Analysis geplant:
Inhalte:

- Grundlagen in $\mathbb{R}$
- Folgen/Reihen
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- Integration
- Taylorpolynome und Potenzreihen
- mehrdimensionale Analysis

Beispiel:

Geben Sie eine konvergente, monoton fallende Folge $(a_n)_n$ in $[-2,1] \in \mathbb{R}$ an.

$a_n =$

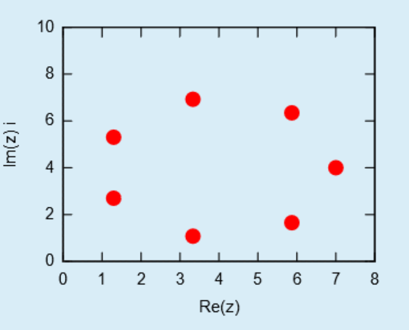
Zufallsvariablen: steigend/fallend, Intervall

Zu erwarten: Weniger Schwierigkeiten mit Tests und der Studenteneingaben
Geschickte Randomisierung wird komplizierter

Grafiken

Im Einsatz: 2D-Plot von Maxima

```
plot([discrete,real1,imag1],[x
    ,size_rn,size_rp],[y,
    size_in,size_ip], [style,
    points],[point_type,bullet
    ],[color,red],[ylabel,"Im(
    z) i"],[xlabel,"Re(z)"])
```



Besser: Geogebra
Optimal: 3D-Plots

begleitende Forschung

Die Veranstaltungen zur Ingenieursmathematik werden durch Julia Gradwohl und Prof. Dr. Andreas Eichler beforscht mit dem Schwerpunkt Entwicklung von mathematikbegogener Studienprofilen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!