

# MAOAM

CAS-gestützte Lehre in großen Studiengängen

Hendrikje Schmidpott-Schulz, Prof. Dr. Andreas Bley,  
Dr. Sebastian Petersen, Prof. Dr. Wolfram Koepf,  
Dr. Anen Lakhal

Universität Kassel, Institut für Mathematik

15.03.2018

Das Projekt

Was ist STACK?

Aufgaben zur Linearen Algebra

Matrizen

Ausblick

# Inhalt

Das Projekt

Was ist STACK?

Aufgaben zur Linearen Algebra

Matrizen

Ausblick

## Was ist MAOAM?

Im Projekt MAOAM erstellen wir randomisierte Übungsaufgaben für Studenten der Ingenieurwissenschaften. Die Aufgaben werden auf der Onlineplattform moodle bereitgestellt und automatisch mit Feedback ausgewertet.

MAOAM ist ein Projekt der Universität Kassel in der Programmlinie „Förderung guter Lehre in großen Studiengängen“.

## Die Herausforderung

Wir betreiben Lehrexport für etwa 400 Elektrotechnik- und Informatikstudierende, Themen: Lineare Algebra, Analysis und Diskrete Strukturen.

Lehrangebot: Vorlesung, kleine Übungsgruppen, Lernzentren, Hausaufgaben

Aber...

- ▶ Mathematik ist nur “notwendiges Übel”
- ▶ Hausaufgaben werden abgeschrieben
- ▶ rechnerische Fähigkeiten fehlen
- ▶ immenser Aufwand bei der Korrektur der Hausaufgaben

## Lösungsansatz und Rahmenbedingungen

- ▶ elektronische Aufgaben
- ▶ CAS-Auswertung
- ▶ Randomisierung

Zunächst als zusätzliches Übungsangebot gedacht, später auch teilweise als Ersatz für die wöchentlichen Hausaufgaben.

- ▶ moodle als Lernplattform etabliert
- ▶ Testumgebung vorhanden
- ▶ STACK-Plugin für CAS-Aufgaben

# Inhalt

Das Projekt

Was ist STACK?

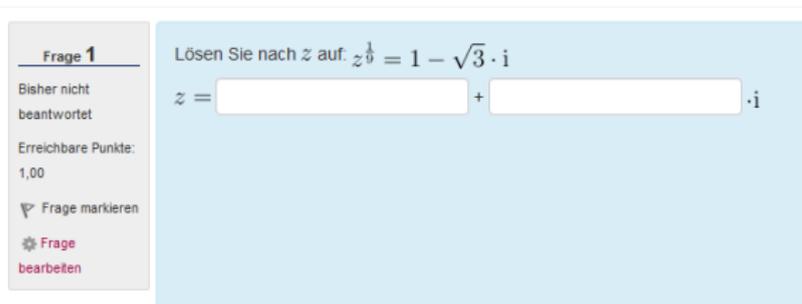
Aufgaben zur Linearen Algebra

Matrizen

Ausblick

## Was ist STACK?

- ▶ kurz für System for Teaching and Assessment using a Computer Algebra Kernel
- ▶ Frage-Plugin für Moodle
- ▶ OpenSource, entwickelt an der Universität Birmingham
- ▶ basiert auf Maxima



The screenshot shows a Moodle question interface. On the left, a grey sidebar contains the following information: 'Frage 1' (Question 1), 'Bisher nicht beantwortet' (Not yet answered), 'Erreichbare Punkte: 1,00' (Achievable points: 1.00), 'Frage markieren' (Mark question), and 'Frage bearbeiten' (Edit question). The main question area has a light blue background and contains the text 'Lösen Sie nach z auf:  $z^{\frac{1}{3}} = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ '. Below this, the equation  $z =$  is followed by two empty input boxes separated by a plus sign, and a period followed by 'i'.

Abbildung: Studentenansicht einer Testfrage

## Was kann STACK?

... alles, was man von einer moodle-Frage erwartet.

... eigentlich alle Rechnungen durchführen, die Maxima kann.

Außerdem:

- ▶ akzeptiert numerische Antworten, Matrizen, Terme, Dropdown- oder Bulletlisten
- ▶ kann randomisierte Aufgaben stellen
- ▶ kann mit den Antworten der Studenten weiterarbeiten
- ▶ gibt differenziertes Feedback
- ▶ Ausdrücke wie int, diff etc. können natürlich auch in den Antworten ausgeschlossen werden
- ▶ testet Ausdrücke auf bestimmte Eigenschaften

## Was kann Stack?

Stack bietet einige Befehle zum Randomisieren, die nicht in Maxima enthalten sind.

```
rand(n) /* der random-Befehl von Maxima*/  
rand([x1,x2,x3,...]) /* ein Element der Liste */  
/* darf auch eine Liste sein.*/  
rand_with_step(a,b,t) /* liefert ein Element zwischen a  
und b mit Schrittweite t */  
rand_with_prohib(a,b,[x1,..]) /* ein Element zwischen a und b aber  
keins aus der Liste */
```

### Beispiel

```
rand([[%pi/3,[1,2,4]],[%pi/2,[1,2,3]])
```

liefert eine der beiden Listen als Ausgabe.

## frontend

Gegeben Sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 6 \\ 8 & 4 & -4 \\ -28 & -8 & 14 \end{bmatrix}$ .

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte des Polynoms.

$P_A(x) =$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:  $-x^3 + 6 \cdot x^2 - 8 \cdot x$

Die folgenden Variablen wurden gefunden:  $[x]$

$\cdot x =$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:  $[4, 2, 0]$

Berechnen Sie falls möglich die invertierbare Matrix  $S$  und die Diagonalmatrix  $D$  sodass  $S^{-1}AS = D$  gilt.

$S =$

<input type="text" value="-1"/>	<input type="text" value="-1"/>	<input type="text" value="2"/>
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="-2"/>	<input type="text" value="-1"/>	<input type="text" value="4"/>

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Abbildung: Eingaben werden sofort auf Ihre Gültigkeit überprüft

## backend

Grundeinträge

Aktuelle Kategorie: Standard für Test1 (2)  Diese Kategorie benutzen

In der Kategorie sichern: Standard für Test1 (2)

Fragetitel\*

Aufgabenvariablen

Zufallsgruppe

Fragetext\* 

Leiten Sie  $f(x)$  nach  $x$  ab.

Berechnen Sie die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x=0$ .

Erreichbare Punkte\*

Spezifisches Feedback\*

Abbildung: Variablen und Funktionsdeklaration, Aufgabenstellung

## Feedback

Stack wertet die Antworten der Studenten anhand von Feedbackbäumen aus:

- ▶ beliebig viele Feedbackbäume pro Aufgabe möglich.
- ▶ ein Feedbackbaum wird durchlaufen, wenn ALLE darin auftretenden Antworten einen Wert besitzen
- ▶ an jedem Knoten wird entschieden ob eine *Studentenantwort* mit einer Lehrerantwort übereinstimmt
- ▶ Studentenantwort muss nicht die tatsächliche Antwort des Studenten sein
- ▶ verschiedene Tests möglich: AlgEquiv, SubstEquiv, Diff, Expanded, ...
- ▶ Optionen, z.B. Genauigkeit bei numerischen Antworten möglich

## Beispiel Feedback

Gegeben ist das Gleichungssystem Frage verbessern | Starte die Frage-Tests...

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -10 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:


Welche Gestalt hat die Lösungsmenge des Gleichungssystems?

Zufallsvariablen: Matrix, Vektor

Feedback:  
Stimmen die  
Row-reduced-echolon-Form der  
Antworten überein?  
Anzahl der Nicht-Null-Zeilen =  
Rang?  
Unterhalb der Diagonalen nur  
Nulleinträge?  
Passt die Matrix zur Antwort  
bzgl. Lösbarkeit?

## Backend Feedbackbaum

› Eingabe: ans1

› Eingabe: ans2

› Rückmeldebaum (PRT) prt1

Aufgabenwert

Auto-Vereinfachung  JA

Feedback-Variablen

Dieser potenzielle Rückmeldebaum wird aktiv, wenn Teilnehmende folgendes geantwortet hat: ans1, ans2

Knoten 1  Antwortüberprüfung  Algorithmen  SA/Ans ans1  TA/Ans dff(x)  Test-Optionen  Feedback

Abbildung: Antworspezifikation und Feedbackbaum

Frage 1: Geben Sie die Ableitung von  $p(x)$  an, Frage 2: Werten Sie diese an Stelle  $x_0 = 0$  aus.

## Grenzen von STACK

Aufgabenstellungen an die Antworten der Studenten anpassen:

### Problem

*Die Lösung wird zu stark vorgegeben oder die Eingabe ist zu kompliziert.*

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$


Frage nachbessern | Starte die Frage-Tests ...

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

`matrix([a11,a12,c],[a21,a22,...],[[...],[...],[...]])`

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die folgenden Variablen wurden gefunden:  $[a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c]$

Schöner wäre: Abfrage der Dimension → Bereitstellen der Eingabematrix

## Grenzen von STACK

Umgang mit leeren Eingabefeldern.

### Problem

*Feedbackbäume werden nur ausgewertet wenn alle dazugehörigen Antwortfelder ausgefüllt sind.*

Es sei Frage nachbessern | Starte die Frage-Tests...

$$U = \text{lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Es gilt  $\dim(U) =$

Geben Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $U$  zu an:

$b^{(1)} =$

,

$b^{(2)} =$

,

$b^{(3)} =$

,

$b^{(4)} =$

,

$b^{(5)} =$

Geben Sie die Basisvektoren als `matrix([x1],[x2],[x3],[x4])` ein. Überzählige Vektoren müssen mit "existiert nicht" gekennzeichnet werden.

# Inhalt

Das Projekt

Was ist STACK?

**Aufgaben zur Linearen Algebra**

Matrizen

Ausblick

## Elementare Vektorrechnung

- ▶ Vektoren addieren, Länge angeben, Skalarprodukt, Winkel bestimmen etc.
- ▶ Geometrie: Geraden-Ebenengleichung, Abstände Punkt/ Gerade /Ebene

Beispiele:

Berechnen Sie  $10 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} =$

Zufallsvariablen: Alle  
Komponenten zwischen -10 und  
10

# Elementare Vektorrechnung

Gegeben seien die

$$\text{Ebene } E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \text{ und die}$$

$$\text{Gerade } G = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Es gilt:

b) Der Abstand der Geraden G zur Ebene E beträgt:

Der Schnittpunkt von G und E ist

$$\begin{bmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{bmatrix}$$

Der Schnittwinkel zwischen G und E beträgt:

(Bitte füllen Sie Nichtzutreffendes mit "\*" aus.)  
Der Winkel darf sowohl abstrahisch als auch als Fließkommazahl mit 3 Nachkommastellen angegeben werden. Die Befehle für Arcusinus etc. sind asin, acos, atan...

- ▶ Setze Zufallsvariable:
  - ▶  $a, b, c, d \in [-5, 5]$  mit z.B.  $b \neq 0$  für  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
  - ▶ sämtliche Komponenten des Richtungsvektors  $v$  und Aufpunkts  $A$  (z.B.  $v_1 \neq 0$ )
- ▶ Berechne Darstellung für  $E$  in Parameterform
- ▶ Ermittle Rang von der Matrix aus Richtungsvektoren
- ▶ Berechne mit HNF und Gerade den Winkel/Abstand

## Komplexe Zahlen

- ▶ Definition und Anschauung
- ▶ Polarkoordinaten und komplexe Exponentialfunktion
- ▶ algebraische Gleichungen

$$z^n = \square$$

Zufallszahlen:  $n$ ,  $z = re^{arg i}$  in  
Polarkoordinaten, mit  $r \in [1, 3]$   
und  $arg \in$   
 $\{\pi/6, \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6\}$

Feedback: Betrag/Argument  
richtig, Argument im  
gewünschten Bereich

Berechnen Sie

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \square e^{\square i}$$

# Komplexe Polynome

Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 7.$$

Bestimmen Sie eine **reelle** Nullstelle  $x_1$  von  $p$  durch gezieltes Probieren (Satz von Vieta).

$$x_1 = \text{[ ]}$$

Spalten Sie durch Polynomdivision den zu  $x_1$  gehörenden Linearfaktor von  $p$  ab, d.h. bestimmen Sie ein Polynom  $r(x)$  mit  $p(x) = (x - x_1) \cdot r(x)$ .

$$r(x) = \text{[ ]}$$

Bestimmen die übrigen Nullstellen von  $p$  (und  $r$ ):

$$x_2 = \text{[ ]} + \text{[ ]} \cdot i$$

$$x_3 = \text{[ ]} + \text{[ ]} \cdot i$$

Zufallsvariablen:  
reelle Nullstelle  $x_1$ ,  
Koeffizienten  $p, q$  einer  
quadratischen Funktion  
mit komplexen Nullstellen

Feedback: Ein Baum für Raten und Polynomdivision, ein Baum für die komplexen Nullstellen des angegebenen Restpolynoms.

# Inhalt

Das Projekt

Was ist STACK?

Aufgaben zur Linearen Algebra

**Matrizen**

Ausblick

## Matrizen

Die einfachste Zufallsmatrix lässt sich erstellen mit:

```
a[i, j]: rand_with_step(-max, max, 1);  
A: genmatrix(a, n, n)
```

Muss diese Matrix regulär sein, reicht es die Diagonalelemente von Null verschieden zu wählen und einen einzigen Wert auszuschließen. Wir ergänzen:

```
a[1, 1]: rand_with_prohib(-max, max, [0]);  
a[2, 2]: rand_with_prohib(-max, max, [0,  
    (a[1, 2]*a[2, 1])/(a[1, 1])]);  
...
```

wobei der ausgeschlossene Wert sich aus dem Gauß-Algorithmus ergibt.

## Matrizen

Wissen wir, dass eine Matrix vom Rang  $n$  regulär ist, so können wir einfach eine Matrix mit gewünschtem Rang  $r \leq n$  erstellen.

### Beispiel

Sei  $A \in GL(3, \mathbb{K})$  und  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann erhalten wir

mit  $A \cdot B$  eine Matrix vom Rang 2, die (normalerweise) nicht direkt als singulär erkannt wird.

# Matrizen

## Problem

*Die Wahrscheinlichkeit eine reguläre Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit zufällig gewählten Koeffizienten zwischen  $t$  und  $-t$  zu erhalten, hängt von Dimension  $n$  und  $t$  ab.*

## Lösung

*Besser kontrollieren lässt sich dies durch:*

```
M: rand([A, A.B, A.C, ...])
```

*wobei  $A, B, C, \dots$  wie oben konstruiert werden.*

## invertierbare Matrizen

### Satz

- ▶  $A$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- ▶ Es gilt:  $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$

Durch eine linke untere und rechte obere Dreiecksmatrix mit vollbesetzten Hauptdiagonalen lässt sich eine reguläre Matrix erstellen.

```
make_regn_n(n,max):=block([L,R,i,j],
  L[i,j]:=0,
  R[i,j]:=0,
  for i:1 thru n do block(
    L[i,i]:rand_with_prohib(-max,max,[0]),
    R[i,i]:rand_with_prohib(-max,max,[0])),
  for i:1 thru n do
    for j:1 thru i do block(
      R[i+1,j]:rand_with_step(-max,max,1),
      L[n-i,n+1-j]:rand_with_step(-max,max,1)),
  L:genmatrix(L,n,n), R:genmatrix(R,n,n), L.R);
```

## invertierbare Matrizen

Aus der Cramerschen Regel folgt:

### Satz

Für die Inverse  $A^{-1}$  einer Matrix  $A \in \mathbb{Z}^{n,n}$  mit  $\det(A) = \pm 1$  gilt:  
 $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n,n}$

Erlauben wir für unsere Dreiecksmatrizen  $L$  und  $R$  nur 1 und -1 auf der Hauptdiagonalen, erhalten wir mit  $A = L \cdot R$  eine ganzzahlig invertierbare Matrix.

# Inhalt

Das Projekt

Was ist STACK?

Aufgaben zur Linearen Algebra

Matrizen

**Ausblick**

## Analysis

Zum nächsten Semester ist der Einsatz in Analysis geplant:  
Inhalte:

- ▶ Grundlagen in  $\mathbb{R}$
- ▶ Folgen/Reihen
- ▶ Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- ▶ Integration
- ▶ Taylorpolynome und Potenzreihen
- ▶ mehrdimensionale Analysis

Zu erwarten: Weniger Schwierigkeiten mit Tests und der Studenteneingaben

Geschickte Randomisierung wird komplizierter

Beispiel:

Geben Sie eine konvergente, monoton fallende Folge  $(a_n)_n$  in  $[-2, 1] \in \mathbb{R}$  an.

$a_n =$

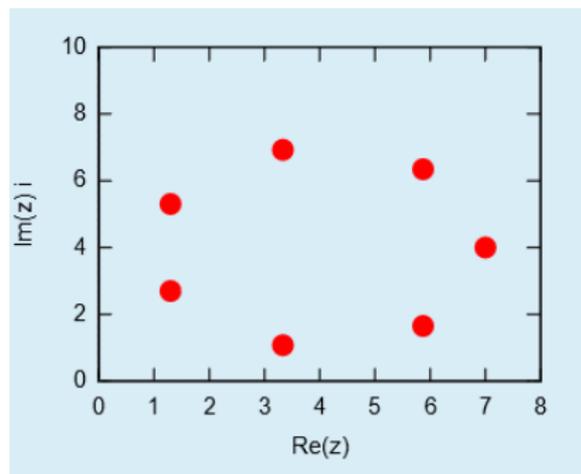
Zufallsvariablen: steigend/fallend,  
Intervall

## Grafiken

Im Einsatz: 2D-Plot von Maxima

```
plot([discrete,real1,imag1],[x  
,size_rn,size_rp],[y,  
size_in,size_ip],[style,  
points],[point_type,bullet  
],[color,red],[ylabel,"Im(  
z) i"],[xlabel,"Re(z)"])
```

Besser: Geogebra  
Optimal: 3D-Plots



## begleitende Forschung

Die Veranstaltungen zur Ingenieursmathematik werden durch Julia Gradwohl und Prof. Dr. Andreas Eichler beforscht mit dem Schwerpunkt Entwicklung von mathematikbegogener Studienprofilen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!